CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE
ESEM - ISIMA - ECOLE NAVALE - ENSAM - ENS CACHAN -
ENSAIS B - ENSAIT - ESIM - ISEP - ITECH

Epreuve de

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Avertissement : Ce sujet est formé de deux parties analyse et géométrie.
Seule la question **A 4.)** de la partie géométrie utilise la partie analyse.

PARTIE ANALYSE

Une propriété des séries numériques à termes strictement positifs.

Soit deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, telles que :

(H) : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

soit $k = \dfrac{u_{n0}}{v_{n0}}$.

a. Montrer que $\forall\, n \geq n_0,\ u_n \leq k\, v_n$.

b. Quelle implication peut-on alors écrire entre les propriétés $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge ?

Étude d'une série entière

a. Écrire le développement en série entière de la fonction $x \to \sqrt{1+x}$ à l'origine sous la forme $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et préciser le rayon de convergence.

b. Soit $\alpha > 0$, $u_n = |a_n|$ et $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Calculer un développement limité en $\dfrac{1}{n}$ à l'ordre 1 de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Par un choix convenable de α, montrer que la série $\sum u_n$ converge.

c. Montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.

d. Montrer que : $\forall\, x \in [-1, 1],\ \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

e. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ vers $f : [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto |t|$.

3. **Calcul de l'intégrale** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2\theta}\, d\theta$.

   a. Pour $n \in N$, soit $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{2n} d\theta$.

   Par une intégration par parties, trouver une relation entre J_n et J_{n+1}.

   b. Calculer J_n en fonction de n.

   c. Déduire du 2.) et du 3.b) que

$$I = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n)!^2}{2^{4n}\, n!^4\, (2n-1)}. \qquad (1)$$

   d. Montrer que la série $\sum a_n J_n$ converge absolument.

   e. Calculer une valeur approchée de I à $0{,}5.10^{-4}$ près à partir de la relation **(1)**.

PARTIE GÉOMÉTRIE

L'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 est muni d'un repère orthonormé $R = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

soit $a \in \mathbb{R}_+^*$,

Σ la sphère de centre O et de rayon a

C le cylindre de révolution d'axe Δ d'équations $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ et de rayon $\frac{a}{2}$.

Γ l'intersection de Σ et de C.

A. Étude de Γ

1. Donner une équation cartésienne de C dans le repère R.

2. Montrer que Γ est formé de deux arcs paramétrés Γ_1 et Γ_{-1} définis par

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{ M / R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x = a\cos^2\theta, y = a\cos\theta\sin\theta, z = a\varepsilon\sin\theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

   $\varepsilon \in \{-1, +1\}$:

   on adoptera le paramétrage de Σ donné par $\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi, -\pi \le \theta \le \pi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi, \ 0 \le \varphi \le \pi \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$

   et on cherchera la condition liant θ et φ pour que M appartienne à C.
   Préciser les éléments de symétrie de Γ.

3. Soit : γ_X la projection orthogonale de Γ sur le plan d'équation $x = 0$
   γ_Y la projection orthogonale de Γ sur le plan d'équation $y = 0$
   γ_Z la projection orthogonale de Γ sur le plan d'équation $z = 0$.

   a. Préciser la nature de γ_Z.

b. Montrer que γ_y est un arc de parabole. Déterminer le sommet, le foyer et la directrice de cette parabole.

c. Étudier les variations de x, y et z fonctions de θ. On prendra $\varepsilon = 1$ pour z.

d. Tracer sur la feuille annexe et conformément au plan indiqué les trois courbes $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$.
On prendra $a = 4$ cm.
On placera les tangentes à γ_x, aux points de cote $z = a$ et $z = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Pour ces points on construira les tangentes à γ_y avec son foyer et sa directrice.
On contrôlera la cohérence entre les trois tracés.

e. Dans le coin prévu à cet effet, dessiner en perspective la sphère Σ, le morceau de cylindre C limité par les deux plans d'équations $z = a$, $z = -a$ et l'arc Γ. Le cylindre et la sphère sont opaques.

4. Calculer la longueur de Γ. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près, lorsque $a = 4$cm.

B. Calculs d'aires.

Étant donné un morceau de surface Σ_1 défini par le paramètrage $\Sigma_1 = \{ M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(u,v), (u,v) \in U \}$,

F de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^2$, on rappelle que l'aire de Σ_1 est le réel $A(\Sigma_1) = \iint_U \left\| \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v} \right\| du\, dv$.

1. Calculer l'aire de la partie du cylindre C intérieure à la sphère Σ.

2. Calculer l'aire du morceau de sphère Σ intérieur au cylindre C, c'est à dire formé des points M de Σ tels que la distance de M à Δ soit inférieure ou égale à $\frac{a}{2}$.

C. Étude d'un cône.

Soit C_1 le cône de sommet O et de directrice Γ.

1. Montrer que C_1 est la surface d'équation cartésienne $x^2(y^2 - z^2) + y^4 = 0$ dans le repère R.

2. On étudie l'intersection de C_1 et du plan d'équation $z = a$.
Soit L sa projection sur le plan xOy.

a. Donner une équation cartésienne de L.
Préciser les éléments de symétrie de L.

b. Calculer le rayon de courbure de L en O.
Que représente le cercle γ_z pour L ?

c. Préciser la position de L par rapport à γ_z.

d. Tracer la partie de L située dans le demi-plan $x \geq 0$ sur la feuille en annexe.